Charakterystyka Eulera

Sławomir Cynk

22 listopada 2001 roku

Leonard Euler

ur. 15 kwietnia 1707
w Bazylei (Szwajcaria)
zm. 18 września 1783
w St. Petersburgu (Rosja).

Wzór Eulera

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi równość*

$$W - K + S = 2,$$

gdzie W *jest liczbą wierchołków,* K *– krawędzi,* S *– ścian.*

Wzór Eulera

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi równość*

$$W - K + S = 2,$$

gdzie W *jest liczbą wierchołków,* K *– krawędzi,* S *– ścian.*

1639 Descartes odkrył podobny wzór dla wielościanów,

Wzór Eulera

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi równość*

$$W - K + S = 2,$$

gdzie W jest liczbą wierchołków, K – krawędzi, S – ścian.

1639 Descartes odkrył podobny wzór dla wielościanów,

1750 Odkrycie powyższego wzoru zwanego **wzorem Eulera** (do czego przyczynił się list do Goldbacha),

Wzór Eulera

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi równość*

$$W - K + S = 2,$$

gdzie W jest liczbą wierchołków, K – krawędzi, S – ścian.

1639 Descartes odkrył podobny wzór dla wielościanów,

1750 Odkrycie powyższego wzoru zwanego **wzorem Eulera** (do czego przyczynił się list do Goldbacha),

1752 Opublikowanie dwóch prac: w pierwszej przyznaje, że nie umie udowodnić wzoru, w drugiej podaje niepełny dowód,

Wzór Eulera

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi równość*

$$W - K + S = 2,$$

gdzie W *jest liczbą wierchołków,* K *– krawędzi,* S *– ścian.*

1639 Descartes odkrył podobny wzór dla wielościanów,

1750 Odkrycie powyższego wzoru zwanego **wzorem Eulera** (do czego przyczynił się list do Goldbacha),

1752 Opublikowanie dwóch prac: w pierwszej przyznaje, że nie umie udowodnić wzoru, w drugiej podaje niepełny dowód,

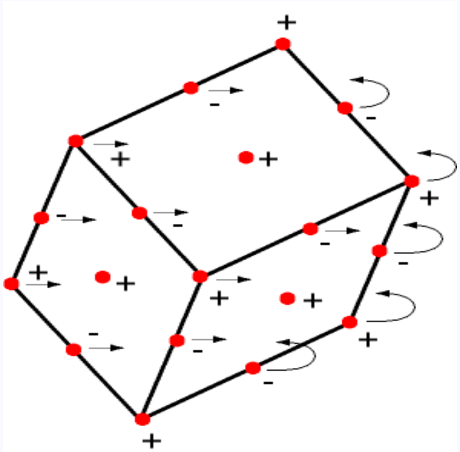
1794 Legendre podał pierwszy kompletny dowód.

Dowód wzoru Eulera

W literaturze znaleźć można bardzo wiele dowodów wzoru Eulera, przedstawię dowód oparty na “ładunkach elektrycznych”.

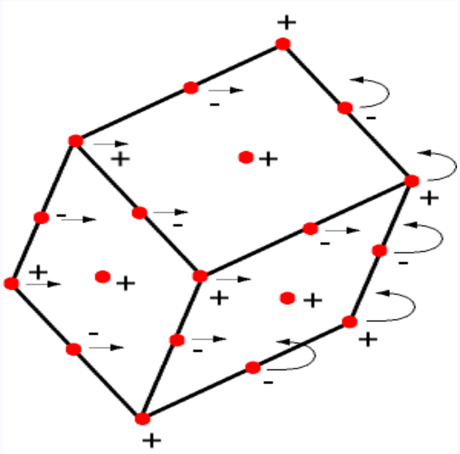
Dowód wzoru Eulera

W literaturze znaleźć można bardzo wiele dowodów wzoru Eulera, przedstawię dowód oparty na "ładunkach elektrycznych". Ustawiamy wielościan w przestrzeni w taki sposób, że żadna krawędź nie jest pozioma (każde dwa wierzchołki leżą na innej wysokości). Umieszczamy ładunek dodatni w każdym wierzchołku, ładunek ujemny na środku każdej krawędzi oraz dodatni na środku każdej ściany.



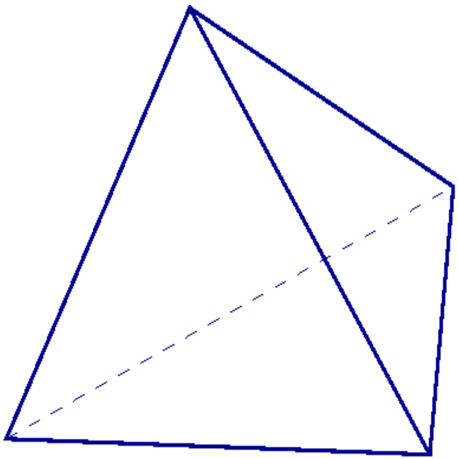
Dowód wzoru Eulera

W literaturze znaleźć można bardzo wiele dowodów wzoru Eulera, przedstawię dowód oparty na “ładunkach elektrycznych”. Ustawiamy wielościan w przestrzeni w taki sposób, że żadna krawędź nie jest pozioma (każde dwa wierzchołki leżą na innej wysokości). Umieszczamy ładunek dodatni w każdym wierzchołku, ładunek ujemny na środku każdej krawędzi oraz dodatni na środku każdej ściany.

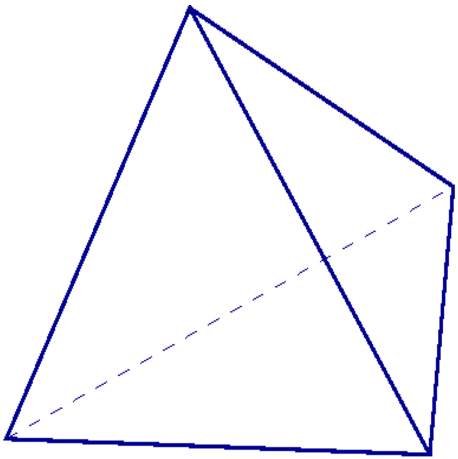


Następnie przesuwamy wszystkie ładunki z wierzchołków i krawędzi na ściany, tak że każdy ładunek wędruje poziomo i zgodnie z ruchem wskazówek zegara (wg. strzałek). Wszystkie ładunki zniosą się z wyjątkiem łądunków w najwyższym i najniższym wierzchołku.

Przykłady

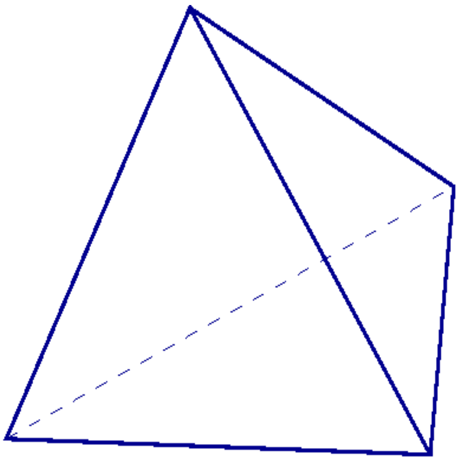


Przykłady

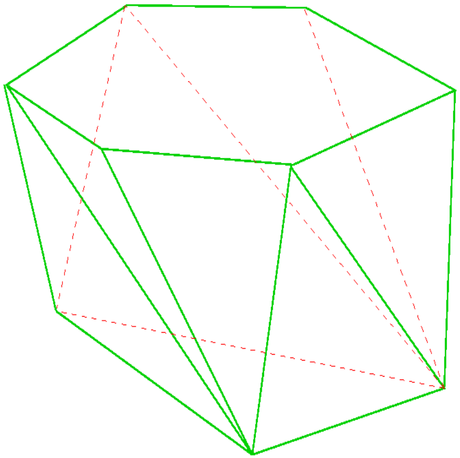


$$W = 4, \quad K = 6, \quad S = 4$$

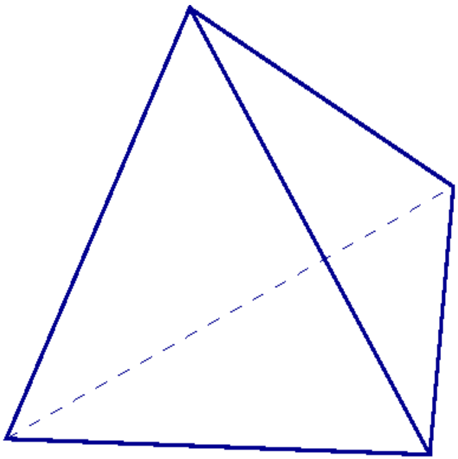
Przykłady



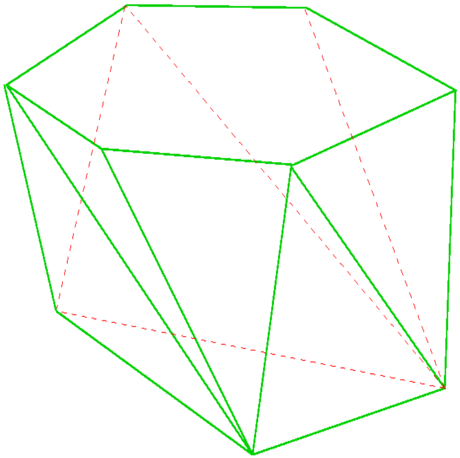
$$W = 4, \quad K = 6, \quad S = 4$$



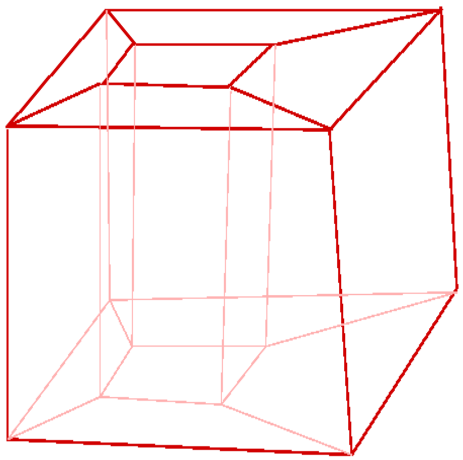
Przykłady

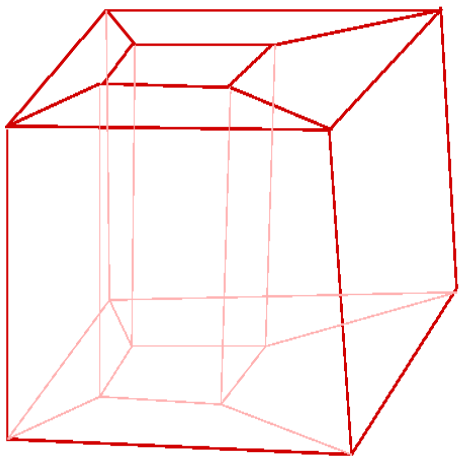


$$W = 4, \quad K = 6, \quad S = 4$$

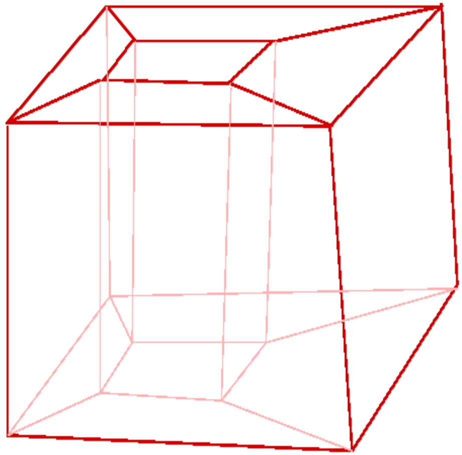


$$W = 9, \quad K = 18, \quad S = 11$$



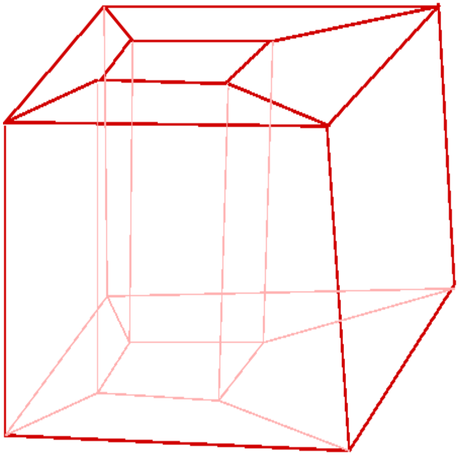


$$W = 16, \quad K = 32, \quad S = 16$$



$$W = 16, \quad K = 32, \quad S = 16$$

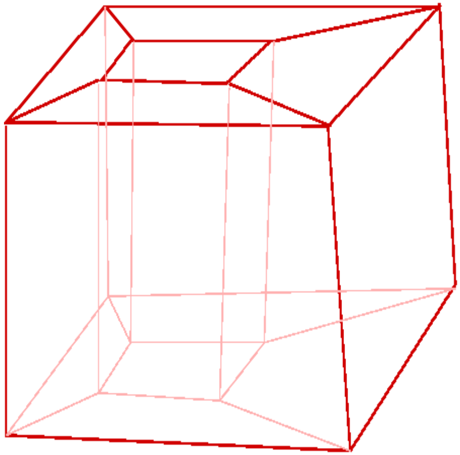
$$W - K + S = 0$$



$$W = 16, \quad K = 32, \quad S = 16$$

$$W - K + S = 0$$

W 1813 roku Simon Antoine Jean Lhuilier udowodnił, że dla wielościanów "z dziurami" wzór Eulera przyjmuje postać $W - K + S = 2 - 2g$ gdzie g jest liczbą "dziur".



$$W = 16, \quad K = 32, \quad S = 16$$

$$W - K + S = 0$$

W 1813 roku Simon Antoine Jean Lhuilier udowodnił, że dla wielościanów "z dziurami" wzór Eulera przyjmuje postać $W - K + S = 2 - 2g$ gdzie g jest liczbą "dziur". Można zmodyfikować dowód "elektryczny" tak aby uzyskać powyższą równość.

W roku 1895 **Jules Henri Poincaré** opublikował “Analysis situs”, w której udowodnił, że dla dowolnego wielościanu naprzemienna suma liczby ścian poszczególnych wymiarów nie zależy od triangulacji. Wykazał dokładniej że liczba ta zwana dziś charakterystyką Eulera (lub Eulera–Poincare) jest naprzemienną sumą liczb Bettiego, a zatem jest **niezmiennikiem topologicznym** wielościanu.

W roku 1895 **Jules Henri Poincaré** opublikował “Analysis situs”, w której udowodnił, że dla dowolnego wielościanu naprzemienna suma liczby ścian poszczególnych wymiarów nie zależy od triangulacji. Wykazał dokładniej że liczba ta zwana dziś charakterystyką Eulera (lub Eulera–Poincare) jest naprzemienną sumą liczb Bettiego, a zatem jest **niezmiennikiem topologicznym** wielościanu. Można ją definiować dla szerokiej klasy przestrzeni topologicznych i posiada następujące własności

- $\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B)$, (addytywność),

W roku 1895 **Jules Henri Poincaré** opublikował “Analysis situs”, w której udowodnił, że dla dowolnego wielościanu naprzemienna suma liczby ścian poszczególnych wymiarów nie zależy od triangulacji. Wykazał dokładniej że liczba ta zwana dziś charakterystyką Eulera (lub Eulera–Poincare) jest naprzemienną sumą liczb Bettiego, a zatem jest **niezmiennikiem topologicznym** wielościanu. Można ją definiować dla szerokiej klasy przestrzeni topologicznych i posiada następujące własności

- $\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B)$, (addytywność),
- jeśli A i B są homeomorficzne to $\chi(A) = \chi(B)$,

W roku 1895 **Jules Henri Poincaré** opublikował “Analysis situs”, w której udowodnił, że dla dowolnego wielościanu naprzemienna suma liczby ścian poszczególnych wymiarów nie zależy od triangulacji. Wykazał dokładniej że liczba ta zwana dziś charakterystyką Eulera (lub Eulera–Poincare) jest naprzemienną sumą liczb Bettiego, a zatem jest **niezmiennikiem topologicznym** wielościanu. Można ją definiować dla szerokiej klasy przestrzeni topologicznych i posiada następujące własności

- $\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B)$, (addytywność),
- jeśli A i B są homeomorficzne to $\chi(A) = \chi(B)$,
- $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

Przykłady zastosowań

W **topologii** jako niezmiennik topologiczny, klasyfikacja powierzchni domkniętych bez brzegu.

Przykłady zastosowań

W **topologii** jako niezmiennik topologiczny, klasyfikacja powierzchni domkniętych bez brzegu.

Osobliwości pól wektorowych: W 1927r. Heinz Hopf udowodnił, że dla dowolnego pola wektorowego na rozmaitości M suma indeksów punktów osobliwych pola wektorowego jest stała i równa $(-1)^{\dim M}\chi(M)$. W szczególności na M istnieje nieznikające pole wektorowe wtedy i tylko wtedy gdy $\chi(M) = 0$ (sfery nie można zaczesać).

Przykłady zastosowań

W **topologii** jako niezmiennik topologiczny, klasyfikacja powierzchni domkniętych bez brzegu.

Osobliwości pól wektorowych: W 1927r. Heinz Hopf udowodnił, że dla dowolnego pola wektorowego na rozmaitości M suma indeksów punktów osobliwych pola wektorowego jest stała i równa $(-1)^{\dim M}\chi(M)$. W szczególności na M istnieje nieznikające pole wektorowe wtedy i tylko wtedy gdy $\chi(M) = 0$ (sfery nie można zaczesać).

Geometria algebraiczna: Jeśli M jest zespoloną rozmaitością rzutową wymiaru n, to charakterzstyka Eulera M jest równa $(-1)^n \cdot c_n$, gdzie c_n jest maksymalną klasą Cherna rozmaitości M.

Przykłady zastosowań

W **topologii** jako niezmiennik topologiczny, klasyfikacja powierzchni domkniętych bez brzegu.

Osobliwości pól wektorowych: W 1927r. Heinz Hopf udowodnił, że dla dowolnego pola wektorowego na rozmaitości M suma indeksów punktów osobliwych pola wektorowego jest stała i równa $(-1)^{\dim M}\chi(M)$. W szczególności na M istnieje nieznikające pole wektorowe wtedy i tylko wtedy gdy $\chi(M) = 0$ (sfery nie można zaczesać).

Geometria algebraiczna: Jeśli M jest zespoloną rozmaitością rzutową wymiaru n, to charakterzstyka Eulera M jest równa $(-1)^n \cdot c_n$, gdzie c_n jest maksymalną klasą Cherna rozmaitości M.

Problem czterech barw (ciekawostka), najmniejsza liczba kolorów potrzebnych do pomalowania dowolnej mapy na powierzchni o genusie g jest równa

$$N = \left[\frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi})\right],$$

dla $\chi \neq 2$ jest to dość proste.