

Rozmaitości Calabi–Yau i podwójne nakrycia $\mathbb{P}^3$

Sławomir Cynk

22 listopada 2001 roku

Rozprawę stanowi zestaw następujących pięciu prac:

- [1] (T. Szemberg, S.C.) *Double covers and Calabi–Yau varieties*, Banach Center Publ. **44** (1998), 93–101.
- [2] *Double coverings of octic arrangements with isolated singularities*, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), 217–225.
- [3] *Hodge numbers of nodal double octics*, Comm. Algebra, **27** (1999), 4097–4102.
- [4] *Hodge numbers of a double octic with non–isolated singularities*, Ann. Polon. Math. **73** (2000), 221–226.
- [5] *Number of Ordinary Multiple Points on a Surface in $\mathbb{P}^3$ of Degree ≤ 8* , Deom. Dedicata **84** (2001), 169–178.

Definicja 1. Gładką rozmaitość rzutową (kählerowską) X nazywamy rozmaitością *Calabi–Yau* jeżeli

1. $b_1(X) = 0$,

2. $\mathcal{K}_X = 0$.

Definicja 1. Gładką rozmaitość rzutową (kählerowską) X nazywamy rozmaitością *Calabi–Yau* jeżeli

1. $b_1(X) = 0$,

2. $\mathcal{K}_X = 0$.

Nie istnieje niezerowa globalna 1–forma holomorficzna na X

istnieje nieznikająca globalna 3–forma holomorficzna na X

Definicja 1. Gładką rozmaitość rzutową (kählerowską) X nazywamy rozmaitością *Calabi–Yau* jeżeli

1. $b_1(X) = 0$,

2. $\mathcal{K}_X = 0$.

Nie istnieje niezerowa globalna 1–forma holomorficzna na X

istnieje nieznikająca globalna 3–forma holomorficzna na X

Rozmaitość *Calabi–Yau* jest zwartą rozmaitością riemannowską z grupą holonomii zawartą w $SU(3)$, ma zerową krzywiznę Ricciego.

(hipoteza Calabi (1954) udowodniona przez Yau (1976))

Definicja 1. Gładką rozmaitość rzutową (kählerowską) X nazywamy rozmaitością *Calabi–Yau* jeżeli

1. $b_1(X) = 0$,

2. $\mathcal{K}_X = 0$.

Nie istnieje niezerowa globalna 1–forma holomorficzna na X

istnieje nieznikająca globalna 3–forma holomorficzna na X

Rozmaitość *Calabi–Yau* jest zwartą rozmaitością riemannowską z grupą holonomii zawartą w $SU(3)$, ma zerową krzywiznę Ricciego.

(hipoteza Calabi (1954) udowodniona przez Yau (1976))

Najważniejsze niezmienniki rozmaitości Calabi–Yau

- charakterystyka Eulera $e(X)$,
- liczby Hodge $h^{i,j}$ ($0 \leq i, j \leq 3$, $i + j \leq 6$),
- liczby Bettiego $b_0, \dots, b_6$, ($b_i = \sum_{p+q=i} h^{p,q}$).

Dla rozmaitości Calabi–Yau

$$\begin{aligned} h^{0,0} &= h^{0,3} = h^{3,0} = h^{3,3} = 1, \\ h^{1,0} &= h^{0,1} = h^{2,0} = h^{0,2} = h^{1,3} = h^{3,1} = h^{2,3} = h^{3,2} = 0 \\ e(X) &= 2(h^{1,1} - h^{1,2}). \end{aligned}$$

Pozostałe liczby Hodge’a mają następującą interpretację

$h^{1,1}$ ($=h^{2,2}$) jest równa liczbie Picarda,

$h^{1,2}$ ($=h^{2,1}$) – liczbie deformacji infinitezymalnych.

Znaczenie rozmaitości Calabi–Yau

- **w matematyce:** jako trójwymiarowy odpowiednik powierzchni $K3$ i krzywych eliptycznych,

Znaczenie rozmaitości Calabi–Yau

- **w matematyce:** jako trójwymiarowy odpowiednik powierzchni $K3$ i krzywych eliptycznych,
- **w fizyce:** teoria strun,

Znaczenie rozmaitości Calabi–Yau

- **w matematyce:** jako trójwymiarowy odpowiednik powierzchni K3 i krzywych eliptycznych,
- **w fizyce:** teoria strun,
- **symetria lustrzana:**
każda rozmaitość Calabi–Yau X posiada parę lustrzaną Y , w najprostszej wersji żądamy aby $h^{1,1}(X) = h^{1,2}(Y)$ i $h^{1,1}(Y) = h^{1,2}(X)$ ($e(X) = -e(Y)$).

Znaczenie rozmaitości Calabi–Yau

- **w matematyce:** jako trójwymiarowy odpowiednik powierzchni K3 i krzywych eliptycznych,
- **w fizyce:** teoria strun,
- **symetria lustrzana:**
każda rozmaitość Calabi–Yau X posiada parę lustrzaną Y , w najprostszej wersji żądamy aby $h^{1,1}(X) = h^{1,2}(Y)$ i $h^{1,1}(Y) = h^{1,2}(X)$ ($e(X) = -e(Y)$).

Otwarte pozostają podstawowe problemy dotyczące rozmaitości Calabi–Yau np. liczba typów topologicznych ograniczoność liczb Hodge’a, charakterystyki Eulera, własności przestrzeni modułów, modele minimalne (program Mori).

Przykłady rozmaitości Calabi–Yau

- Pełne przecięcia w $\mathbb{P}^n$
 - kwintyka w $\mathbb{P}^4$, $e(X) = -200$,
 - kwadryka i kwartyka w $\mathbb{P}^5$, $e(X) = -176$,
 - dwie kubiki $\mathbb{P}^5$, $c_3 = -144$,
 - dwie kwadryki i kubika w $\mathbb{P}^6$, $e_X = -144$,
 - cztery kwadryki $\mathbb{P}^7$, $e(X) = -128$.

Przykłady rozmaitości Calabi–Yau

- Pełne przecięcia w $\mathbb{P}^n$
 - kwintyka w $\mathbb{P}^4$, $e(X) = -200$,
 - kwadryka i kwartyka w $\mathbb{P}^5$, $e(X) = -176$,
 - dwie kubiki $\mathbb{P}^5$, $c_3 = -144$,
 - dwie kwadryki i kubika w $\mathbb{P}^6$, $e_X = -144$,
 - cztery kwadryki $\mathbb{P}^7$, $e(X) = -128$.
- podwójne nakrycie $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^3$ rozgałęzione wzdłuż nieosobliwej powierzchni stopnia 8 B , $e(X) = -296$.

Przykłady rozmaitości Calabi–Yau

- Pełne przecięcia w $\mathbb{P}^n$
 - kwintyka w $\mathbb{P}^4$, $e(X) = -200$,
 - kwadryka i kwartyka w $\mathbb{P}^5$, $e(X) = -176$,
 - dwie kubiki $\mathbb{P}^5$, $c_3 = -144$,
 - dwie kwadryki i kubika w $\mathbb{P}^6$, $e_X = -144$,
 - cztery kwadryki $\mathbb{P}^7$, $e(X) = -128$.
- podwójne nakrycie $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^3$ rozgałęzione wzdłuż nieosobliwej powierzchni stopnia 8 B , $e(X) = -296$.

Jednym ze sposobów konstrukcji nowych przykładów rozmaitości Calabi–Yau jest deformowanie znanych przykładów aż staną się osobliwe, a następnie rozwiązywanie osobliwości

Przykłady rozmaitości Calabi–Yau

- Pełne przecięcia w $\mathbb{P}^n$
 - kwintyka w $\mathbb{P}^4$, $e(X) = -200$,
 - kwadryka i kwartyka w $\mathbb{P}^5$, $e(X) = -176$,
 - dwie kubiki $\mathbb{P}^5$, $c_3 = -144$,
 - dwie kwadryki i kubika w $\mathbb{P}^6$, $e_X = -144$,
 - cztery kwadryki $\mathbb{P}^7$, $e(X) = -128$.
- podwójne nakrycie $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^3$ rozgałęzione wzdłuż nieosobliwej powierzchni stopnia 8 B , $e(X) = -296$.

Jednym ze sposobów konstrukcji nowych przykładów rozmaitości Calabi–Yau jest deformowanie znanych przykładów aż staną się osobliwe, a następnie rozwiązywanie osobliwości

Moim celem było więc przebadanie klasy tych rozmaitości Calabi–Yau, które są nieosobliwymi modelami podwójnego nakrycia przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^3$ rozgałęzionymi wzdłuż powierzchni stopnia 8 (ang. double octics).

Moim celem było więc przebadanie klasy tych rozmaitości Calabi–Yau, które są nieosobliwymi modelami podwójnego nakrycia przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^3$ rozgałęzionymi wzdłuż powierzchni stopnia 8 (ang. double octics).

Cel ten został podzielony na następujące cztery etapy

1. Opis powierzchni stopnia 8, dla których podwójne nakrycie ma model nieosobliwy będący rozmaitością Calabi–Yau,

Moim celem było więc przebadanie klasy tych rozmaitości Calabi–Yau, które są nieosobliwymi modelami podwójnego nakrycia przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^3$ rozgałęzionymi wzdłuż powierzchni stopnia 8 (ang. double octics).

Cel ten został podzielony na następujące cztery etapy

1. Opis powierzchni stopnia 8, dla których podwójne nakrycie ma model nieosobliwy będący rozmaitością Calabi–Yau,
2. Opis rozwiązania osobliwości podwójnego nakrycia oraz wyznaczenie charakterystyki Eulera,

Moim celem było więc przebadanie klasy tych rozmaitości Calabi–Yau, które są nieosobliwymi modelami podwójnego nakrycia przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^3$ rozgałęzionymi wzdłuż powierzchni stopnia 8 (ang. double octics).

Cel ten został podzielony na następujące cztery etapy

1. Opis powierzchni stopnia 8, dla których podwójne nakrycie ma model nieosobliwy będący rozmaitością Calabi–Yau,
2. Opis rozwiązania osobliwości podwójnego nakrycia oraz wyznaczenie charakterystyki Eulera,
3. Sklasyfikowanie powierzchni występujących w punkcie 1,

Moim celem było więc przebadanie klasy tych rozmaitości Calabi–Yau, które są nieosobliwymi modelami podwójnego nakrycia przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^3$ rozgałęzionymi wzdłuż powierzchni stopnia 8 (ang. double octics).

Cel ten został podzielony na następujące cztery etapy

1. Opis powierzchni stopnia 8, dla których podwójne nakrycie ma model nieosobliwy będący rozmaitością Calabi–Yau,
2. Opis rozwiązania osobliwości podwójnego nakrycia oraz wyznaczenie charakterystyki Eulera,
3. Sklasyfikowanie powierzchni występujących w punkcie 1,
4. Wyznaczenie liczb Hodge’a podwójnego nakrycia.

Opis powierzchni stopnia 8, dla których podwójne nakrycie ma model nieosobliwy będący rozmaitością Calabi–Yau, opis rozwiązania osobliwości podwójnego nakrycia oraz wyznaczenie jego charakterystyki Eulera

- opis rozdmuchań *dopuszczalnych* tzn, takich które “nie wpływają” na pierwszą liczbę Betti’ego i dywizor kanoniczny podwójnego nakrycia

Opis powierzchni stopnia 8, dla których podwójne nakrycie ma model nieosobliwy będący rozmaitością Calabi–Yau, opis rozwiązania osobliwości podwójnego nakrycia oraz wyznaczenie jego charakterystyki Eulera

- opis rozdmuchań *dopuszczalnych* tzn, takich które “nie wpływają” na pierwszą liczbę Betti’ego i dywizor kanoniczny podwójnego nakrycia
- definicja “konfiguracji z osobliwościami izolowanymi”, czyli powierzchni które lokalnie wyglądają jak konfiguracja płaszczyzn lub mają proste punkty wielokrotne,

Opis powierzchni stopnia 8, dla których podwójne nakrycie ma model nieosobliwy będący rozmaitością Calabi–Yau, opis rozwiązania osobliwości podwójnego nakrycia oraz wyznaczenie jego charakterystyki Eulera

- opis rozdmuchań *dopuszczalnych* tzn, takich które “nie wpływają” na pierwszą liczbę Betti’ego i dywizor kanoniczny podwójnego nakrycia
- definicja “konfiguracji z osobliwościami izolowanymi”, czyli powierzchni które lokalnie wyglądają jak konfiguracja płaszczyzn lub mają proste punkty wielokrotne,
- wyznaczenie konfiguracji, które można rozwiązać za pomocą rozdmuchań dopuszczalnych

Twierdzenie 1. *jeśli konfiguracja B stopnia 8 zawiera jedynie*

- *krzywe podwójne i potrójne,*
- *konfiguracyjne punkty q -krotne dla $q = 2, 3, 4, 5$,*
- *izolowane punkty q -krotne dla $q = 2, 4, 5$*

to podwójne nakrycie $\mathbb{P}^3$ rozgałęzione wzdłuż B posiada model nieosobliwy $\hat{X}$ który jest rozmaitością Calabi–Yau.

Twierdzenie 1. *jeśli konfiguracja B stopnia 8 zawiera jedynie*

- *krzywe podwójne i potrójne,*
- *konfiguracyjne punkty q -krotne dla $q = 2, 3, 4, 5$,*
- *izolowane punkty q -krotne dla $q = 2, 4, 5$*

to podwójne nakrycie $\mathbb{P}^3$ rozgałęzione wzdłuż B posiada model nieosobliwy $\hat{X}$ który jest rozmaitością Calabi–Yau.

Ponadto jeśli B nie zawiera potrójnej krzywej eliptycznej, to

$$\begin{aligned} e(\hat{X}) = 8 - \sum_i (d_i^3 - 4d_i^2 + 6d_i) + 2 \sum_{i < j} (4 - d_i - d_j) d_i d_j - \\ - \sum_{i < j < k} d_i d_j d_k + 4p_4^0 + 3p_4^1 + 16p_5^0 + 18p_5^1 + 20p_5^2 + \\ + l_3 + 2m_2 + 36m_4 + 56m_5. \end{aligned}$$

gdzie $d_i = \deg B_i$

Powyższe twierdzenie pozwala na podanie przykładów posiadających 206 różnych liczb Eulera

Sklasyfikowanie powierzchni występujących jako składowe nierozkładalne powierzchni z poprzedniego twierdzenia

Są to powierzchnie stopnia ≤ 8 mające proste punkty wielokrotne jako jedyne osobliwości. Przypadek punktów podwójnych został już dość dokładnie zbadany, reszta była w zasadzie otwarta

- wyznaczenie niezmienników liczbowych ww. powierzchni (charakterystyka Eulera, nieregularność, genus arytmetyczny),

Sklasyfikowanie powierzchni występujących jako składowe nierozkładalne powierzchni z poprzedniego twierdzenia

Są to powierzchnie stopnia ≤ 8 mające proste punkty wielokrotne jako jedyne osobliwości. Przypadek punktów podwójnych został już dość dokładnie zbadany, reszta była w zasadzie otwarta

- wyznaczenie niezmienników liczbowych ww. powierzchni (charakterystyka Eulera, nieregularność, genus arytmetyczny),
- wyznaczenie klasy (czyli stopnia powierzchni dualnej),

Skłasyfikowanie powierzchni występujących jako składowe nierozkładalne powierzchni z poprzedniego twierdzenia

Są to powierzchnie stopnia ≤ 8 mające proste punkty wielokrotne jako jedyne osobliwości. Przypadek punktów podwójnych został już dość dokładnie zbadany, reszta była w zasadzie otwarta

- wyznaczenie niezmienników liczbowych ww. powierzchni (charakterystyka Eulera, nieregularność, genus arytmetyczny),
- wyznaczenie klasy (czyli stopnia powierzchni dualnej),
- korzystając z powyższych i twierdzenia o klasyfikacji powierzchni (Kodairy–Enriquesa) otrzymujemy oszacowania na liczbę poszczególnych typów osobliwości,

Skłasyfikowanie powierzchni występujących jako składowe nierozkładalne powierzchni z poprzedniego twierdzenia

Są to powierzchnie stopnia ≤ 8 mające proste punkty wielokrotne jako jedyne osobliwości. Przypadek punktów podwójnych został już dość dokładnie zbadany, reszta była w zasadzie otwarta

- wyznaczenie niezmienników liczbowych ww. powierzchni (charakterystyka Eulera, nieregularność, genus arytmetyczny),
- wyznaczenie klasy (czyli stopnia powierzchni dualnej),
- korzystając z powyższych i twierdzenia o klasyfikacji powierzchni (Kodairy–Enriquesa) otrzymujemy oszacowania na liczbę poszczególnych typów osobliwości,
- konkretne przykłady

Wyznaczenie liczb Hodge'a podwójnego nakrycia

Jest to zdecydowanie najtrudniejsze zagadnienie

Wyznaczenie liczb Hodge'a podwójnego nakrycia

Jest to zdecydowanie najtrudniejsze zagadnienie

Jedyny przypadek, który był znany wcześniej to gdy powierzchnia D zawiera jedynie proste punkty podwójne (Clemens)

Wyznaczenie liczb Hodge'a podwójnego nakrycia

Jest to zdecydowanie najtrudniejsze zagadnienie

Jedyny przypadek, który był znany wcześniej to gdy powierzchnia D zawiera jedynie proste punkty podwójne (Clemens)

Zaproponowałem metodę wyznaczania liczb Hodge'a, dzięki której uzyskałem zupełnie elementarny dowód formuły Clemensa, oraz zastosowałem ją z powodzeniem do innych typów osobliwości (w tym nieizolowanych)