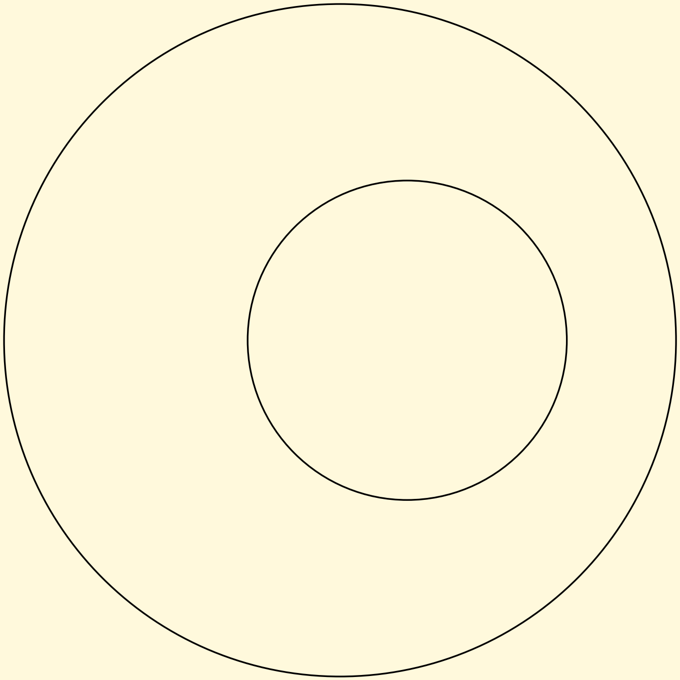
Twierdzenie Ponceleta

Sławomir Cynk

22 listopada 2001 roku

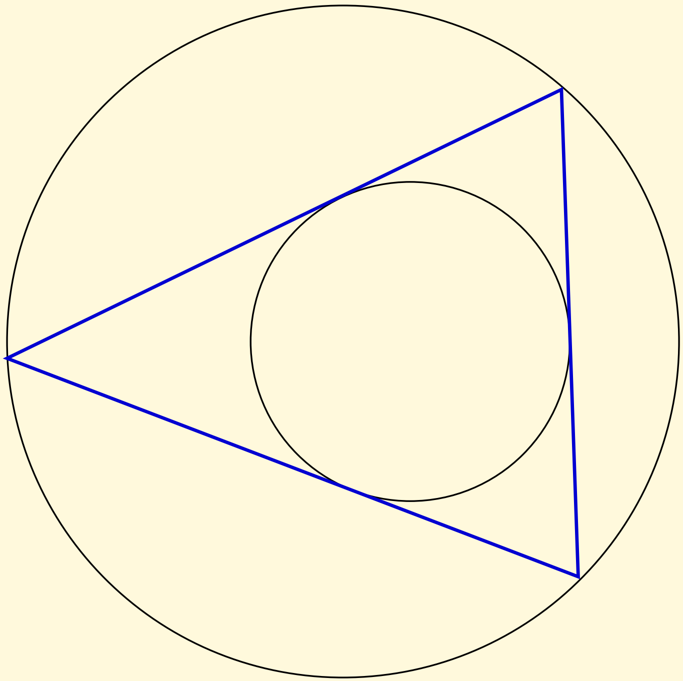
Rozważmy następujący problem geometryczny

Dla danych dwóch okręgów C_1 i C_2 na płaszczyźnie skonstruować n–kąt, którego krawędzie (proste zawierające krawędzie) są styczne do okręgu C_1, a wierzchołki należą do okręgu C_2.



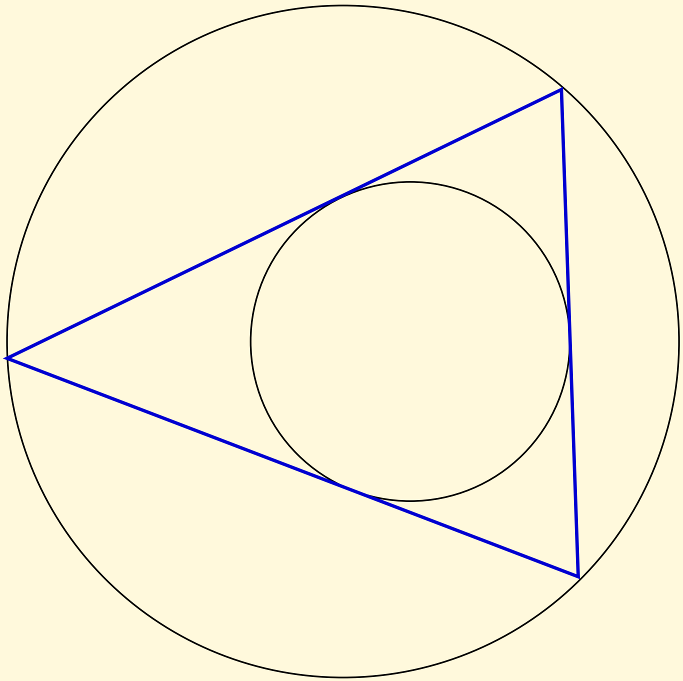
Rozważmy następujący problem geometryczny

Dla danych dwóch okręgów C_1 i C_2 na płaszczyźnie skonstruować n–kąt, którego krawędzie (proste zawierające krawędzie) są styczne do okręgu C_1, a wierzchołki należą do okręgu C_2. Jeżeli ustalimy jeden z wierzchołków n–kąta to zadanie staje się prostym zagadnieniem konstrukcyjnym, a problem sprowadza się do pytania o cykliczność pewnej kosntrukcji



Rozważmy następujący problem geometryczny

Dla danych dwóch okręgów C_1 i C_2 na płaszczyźnie skonstruować n–kąt, którego krawędzie (proste zawierające krawędzie) są styczne do okręgu C_1, a wierzchołki należą do okręgu C_2. Jeżeli ustalimy jeden z wierzchołków n–kąta to zadanie staje się prostym zagadnieniem konstrukcyjnym, a problem sprowadza się do pytania o cykliczność pewnej kosntrukcji



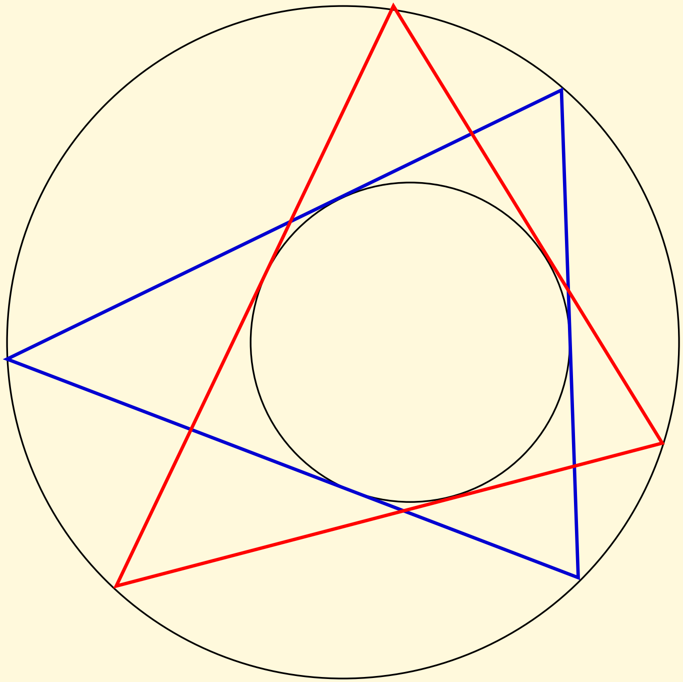
W przypadku $n = 3$ (trójkąta) L. Euler udowodnił, że warunkiem dostatecznym i koniecznym jest równość

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

(gdzie r, R są promieniami okręgów, d odległością między ich środkami),

Rozważmy następujący problem geometryczny

Dla danych dwóch okręgów C_1 i C_2 na płaszczyźnie skonstruować n–kąt, którego krawędzie (proste zawierające krawędzie) są styczne do okręgu C_1, a wierzchołki należą do okręgu C_2. Jeżeli ustalimy jeden z wierzchołków n–kąta to zadanie staje się prostym zagadnieniem konstrukcyjnym, a problem sprowadza się do pytania o cykliczność pewnej kosntrukcji



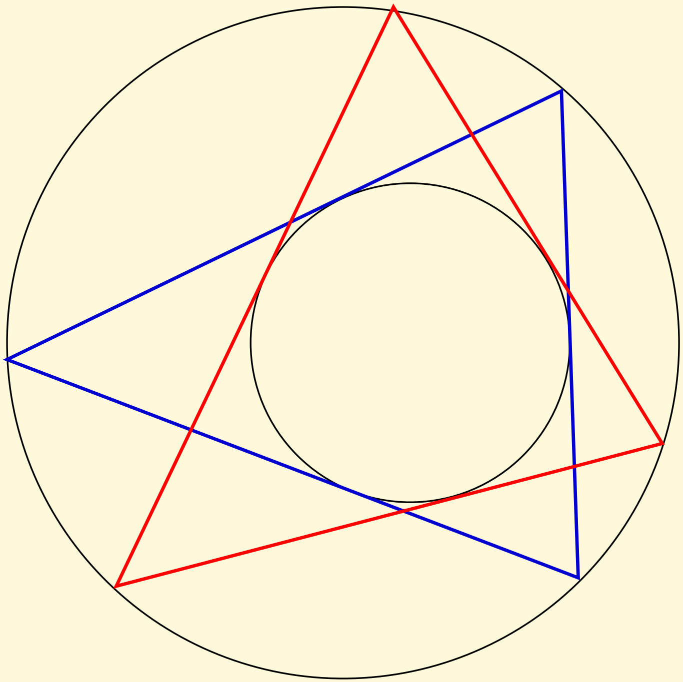
W przypadku $n = 3$ (trójkąta) L. Euler udowodnił, że warunkiem dostatecznym i koniecznym jest równość

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

(gdzie r, R są promieniami okręgów, d odległością między ich środkami),

Rozważmy następujący problem geometryczny

Dla danych dwóch okręgów C_1 i C_2 na płaszczyźnie skonstruować n–kąt, którego krawędzie (proste zawierające krawędzie) są styczne do okręgu C_1, a wierzchołki należą do okręgu C_2. Jeżeli ustalimy jeden z wierzchołków n–kąta to zadanie staje się prostym zagadnieniem konstrukcyjnym, a problem sprowadza się do pytania o cykliczność pewnej kosntrukcji



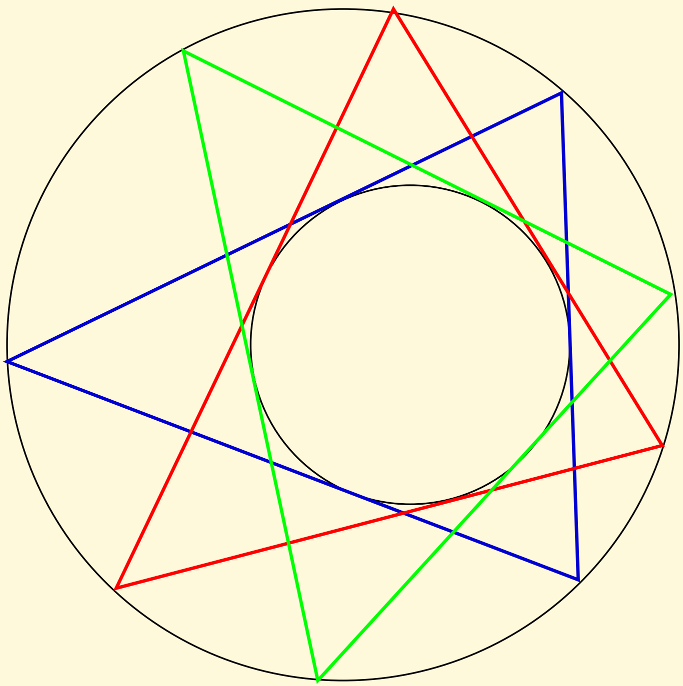
W przypadku $n = 3$ (trójkąta) L. Euler udowodnił, że warunkiem dostatecznym i koniecznym jest równość

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

(gdzie r, R są promieniami okręgów, d odległością między ich środkami), a ponadto, że warunek ten nie zależy od wyboru wierzchołka.

Rozważmy następujący problem geometryczny

Dla danych dwóch okręgów C_1 i C_2 na płaszczyźnie skonstruować n–kąt, którego krawędzie (proste zawierające krawędzie) są styczne do okręgu C_1, a wierzchołki należą do okręgu C_2. Jeżeli ustalimy jeden z wierzchołków n–kąta to zadanie staje się prostym zagadnieniem konstrukcyjnym, a problem sprowadza się do pytania o cykliczność pewnej kosntrukcji



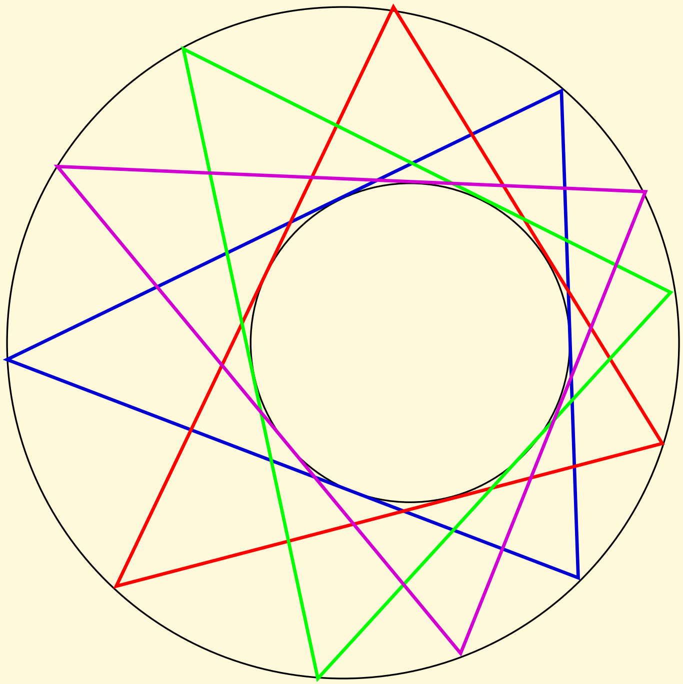
W przypadku $n = 3$ (trójkąta) L. Euler udowodnił, że warunkiem dostatecznym i koniecznym jest równość

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

(gdzie r, R są promieniami okręgów, d odległością między ich środkami), a ponadto, że warunek ten nie zależy od wyboru wierzchołka.

Rozważmy następujący problem geometryczny

Dla danych dwóch okręgów C_1 i C_2 na płaszczyźnie skonstruować n–kąt, którego krawędzie (proste zawierające krawędzie) są styczne do okręgu C_1, a wierzchołki należą do okręgu C_2. Jeżeli ustalimy jeden z wierzchołków n–kąta to zadanie staje się prostym zagadnieniem konstrukcyjnym, a problem sprowadza się do pytania o cykliczność pewnej kosntrukcji



W przypadku $n = 3$ (trójkąta) L. Euler udowodnił, że warunkiem dostatecznym i koniecznym jest równość

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

(gdzie r, R są promieniami okręgów, d odległością między ich środkami), a ponadto, że warunek ten nie zależy od wyboru wierzchołka.

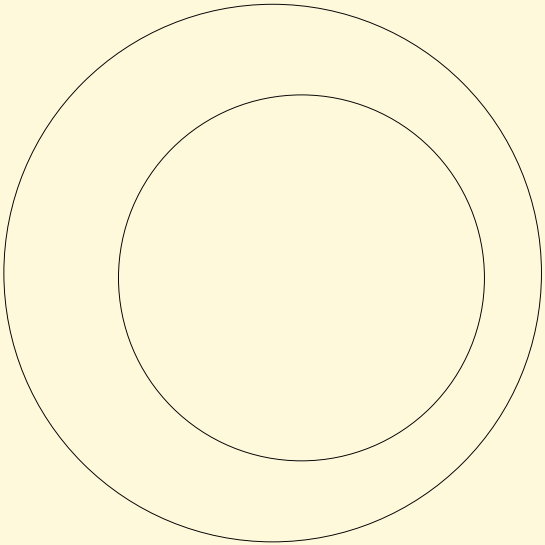
Podobny problem dla $n = 4$ rozwiązał w 1797 roku **Nicolaus Fuss** (30 stycznia 1755 Bazylea, Szwajcaria – 4 Stycznia 1826, St. Petersburg, Rosja; uczeń Eulera), a stosowny warunek przyjmuje teraz postać

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

Podobny problem dla $n = 4$ rozwiązał w 1797 roku **Nicolaus Fuss** (30 stycznia 1755 Bazylea, Szwajcaria – 4 Stycznia 1826, St. Petersburg, Rosja; uczeń Eulera), a stosowny warunek przyjmuje teraz postać

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

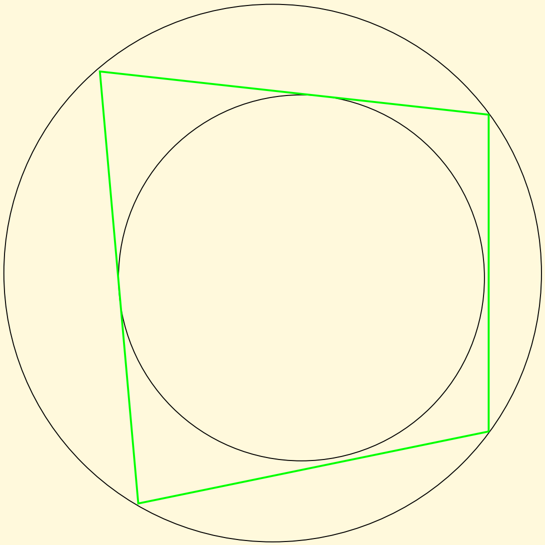
i podobnie jak dla $n = 3$ nie zależy od wyboru wierzchołka



Podobny problem dla $n = 4$ rozwiązał w 1797 roku **Nicolaus Fuss** (30 stycznia 1755 Bazylea, Szwajcaria – 4 Stycznia 1826, St. Petersburg, Rosja; uczeń Eulera), a stosowny warunek przyjmuje teraz postać

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

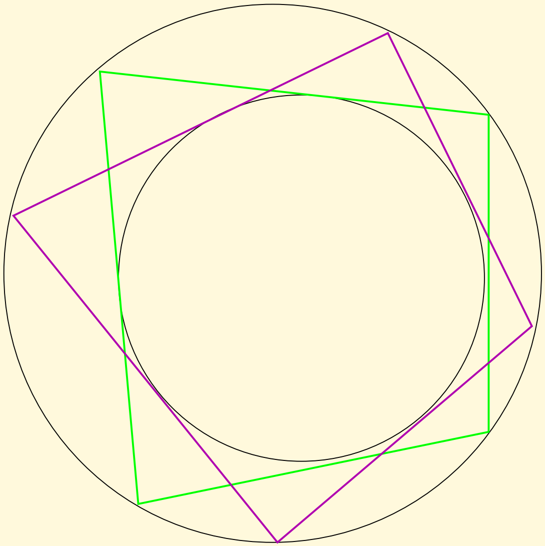
i podobnie jak dla $n = 3$ nie zależy od wyboru wierzchołka



Podobny problem dla $n = 4$ rozwiązał w 1797 roku **Nicolaus Fuss** (30 stycznia 1755 Bazylea, Szwajcaria – 4 Stycznia 1826, St. Petersburg, Rosja; uczeń Eulera), a stosowny warunek przyjmuje teraz postać

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

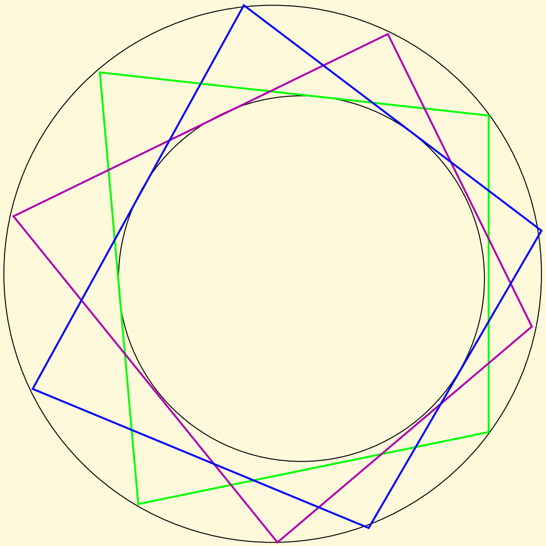
i podobnie jak dla $n = 3$ nie zależy od wyboru wierzchołka



Podobny problem dla $n = 4$ rozwiązał w 1797 roku **Nicolaus Fuss** (30 stycznia 1755 Bazylea, Szwajcaria – 4 Stycznia 1826, St. Petersburg, Rosja; uczeń Eulera), a stosowny warunek przyjmuje teraz postać

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

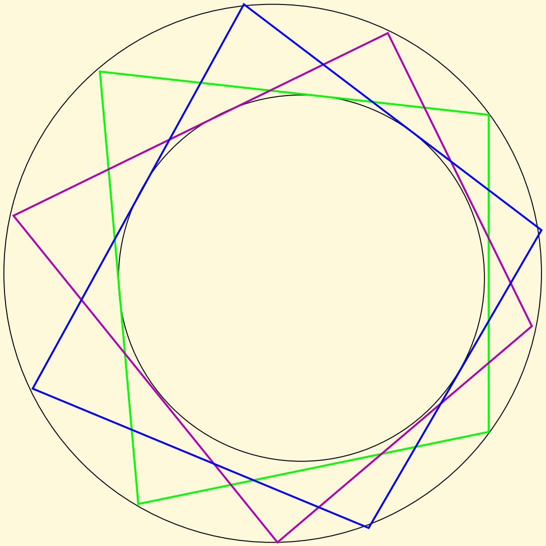
i podobnie jak dla $n = 3$ nie zależy od wyboru wierzchołka



Podobny problem dla $n = 4$ rozwiązał w 1797 roku **Nicolaus Fuss** (30 stycznia 1755 Bazylea, Szwajcaria – 4 Stycznia 1826, St. Petersburg, Rosja; uczeń Eulera), a stosowny warunek przyjmuje teraz postać

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

i podobnie jak dla $n = 3$ nie zależy od wyboru wierzchołka



W przypadku $n = 5, 6, 7, 8$ Fuss potrafił podać odpowiedni warunek jedynie dla szczególnego położenia wielokąta (a mianowicie dla przypadku wielokąta symetrycznego względem prostej łączącej środki okręgów).

W roku 1817 **Jean Victor Poncelet**

1 lipca 1788, Metz, Francja — 22 grudnia 1867, Paryż, Francja

uczeń Gasparda Monge'a, geometra, twórca geometrii rzutowej, mechanik, inżynier wojskowy – uczestnik wojny z Rosją w 1812r.

udowodnił bardzo zaskakujący fakt:

dla dowolnych dwóch stożkowych C_1 i C_2 jeżeli istnieje n–kąt, którego krawędzie są styczne do C_1, a wierzchołki leżą na C_2 to każdy punkt stożkowej C_2 jest wierzchołkiem takiego n–kąta.

Jeżeli konstrukcja Ponceleta zamyka się po n–krokach dla jednego punktu początkowego, to zamyka się po n– krokach dla każdego innego punktu początkowego.

W roku 1817 **Jean Victor Poncelet**

1 lipca 1788, Metz, Francja — 22 grudnia 1867, Paryż, Francja

uczeń Gasparda Monge'a, geometra, twórca geometrii rzutowej, mechanik, inżynier wojskowy – uczestnik wojny z Rosją w 1812r.

udowodnił bardzo zaskakujący fakt:

dla dowolnych dwóch stożkowych C_1 i C_2 jeżeli istnieje n–kąt, którego krawędzie są styczne do C_1, a wierzchołki leżą na C_2 to każdy punkt stożkowej C_2 jest wierzchołkiem takiego n–kąta.

Jeżeli konstrukcja Ponceleta zamyka się po n–krokach dla jednego punktu początkowego, to zamyka się po n– krokach dla każdego innego punktu początkowego.

Quand un polygon quelconque est a la fois inscrit a une section conique et circonscrit a une autre, il en existe une finite de semblables qui jouissent de la même propriete a légard des deux courbes; ou plutôt tout ceux qu'on essayerait de décrire a volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux-mêmes sur ces courbes.
Et réciproquement, s'il arrive qu'en essayant d'inscrire a volonté, a une section conique, un polygon dont les cotes en touchent une autre, ce polygon ne se ferme pas de lui-même, il ne saurait nécessairement y en avoir d'autres qui jouissent de cette propriete.

W 1853 roku **Artur Cayley** podał dowód twierdzenia Ponceleta oparty na całkach eliptycznych, uzyskał przy tym warunki okresowości konstrukcji Ponceleta.

Od tej pory wszystkie rozważania przebiegają w ciele liczb zespolonych

W 1853 roku **Artur Cayley** podał dowód twierdzenia Ponceleta oparty na całkach eliptycznych, uzyskał przy tym warunki okresowości konstrukcji Ponceleta.

Od tej pory wszystkie rozważania przebiegają w ciele liczb zespolonych

Stożkowa C_1 ma równanie postaci $C_1 = (x, y, 1)Q_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, gdzie Q_1 jest macierzą symetryczną $\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Podobnie stożkową C_2 zapisujemy przy pomocy macierzy Q_2.

W 1853 roku **Artur Cayley** podał dowód twierdzenia Ponceleta oparty na całkach eliptycznych, uzyskał przy tym warunki okresowości konstrukcji Ponceleta.

Od tej pory wszystkie rozważania przebiegają w ciele liczb zespolonych

Stożkowa C_1 ma równanie postaci $C_1 = (x, y, 1)Q_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, gdzie Q_1 jest macierzą symetryczną $\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Podobnie stożkową C_2 zapisujemy przy pomocy macierzy Q_2. Niech

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots = \sqrt{\det(tQ_1 + Q_2)}$$

będzie rozwinięciem Taylora (pierwiastka kwadratowego wielomianu stopnia 3).

W 1853 roku **Artur Cayley** podał dowód twierdzenia Ponceleta oparty na całkach eliptycznych, uzyskał przy tym warunki okresowości konstrukcji Ponceleta.

Od tej pory wszystkie rozważania przebiegają w ciele liczb zespolonych

Stożkowa C_1 ma równanie postaci $C_1 = (x, y, 1)Q_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, gdzie Q_1 jest macierzą symetryczną $\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Podobnie stożkową C_2 zapisujemy przy pomocy macierzy Q_2. Niech

$$A_0 + A_1t + A_2t^2 + \cdots = \sqrt{\det(tQ_1 + Q_2)}$$

będzie rozwinięciem Taylora (pierwiastka kwadratowego wielomianu stopnia 3).

Konstrukcja Ponceleta jest n–cykliczna wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{vmatrix} A_2 & \cdots & A_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textit{dla} \quad n = 2m+1$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & \cdots & A_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textit{dla} \quad n = 2m.$$

W roku 1976 P. Griffits i J. Harris przetłumaczyli dowód Cayley na język współczesnej geometrii algebraicznej

W roku 1976 P. Griffits i J. Harris przetłumaczyli dowód Cayley na język współczesnej geometrii algebraicznej

- **rozmaitość incydencji** C, czyli zbiór par (P, l), gdzie l jest styczną do stożkowej C_1, P jest punktem przecięcia $l \cap C_2$,

W roku 1976 P. Griffits i J. Harris przetłumaczyli dowód Cayley na język współczesnej geometrii algebraicznej

- **rozmaitość incydencji** C, czyli zbiór par (P, l), gdzie l jest styczną do stożkowej C_1, P jest punktem przecięcia $l \cap C_2$,
- konstrukcja Ponceleta jest **automorfizmem rozmaitości** C **bez punktów stałych**,

W roku 1976 P. Griffits i J. Harris przetłumaczyli dowód Cayley na język współczesnej geometrii algebraicznej

- **rozmaitość incydencji** C, czyli zbiór par (P, l), gdzie l jest styczną do stożkowej C_1, P jest punktem przecięcia $l \cap C_2$,
- konstrukcja Ponceleta jest **automorfizmem rozmaitości** C **bez punktów stałych**,
- rozmaitość C jest **krzywą eliptyczną**, czyli **torusem**,

W roku 1976 P. Griffits i J. Harris przetłumaczyli dowód Cayley na język współczesnej geometrii algebraicznej

- **rozmaitość incydencji** C, czyli zbiór par (P, l), gdzie l jest styczną do stożkowej C_1, P jest punktem przecięcia $l \cap C_2$,
- konstrukcja Ponceleta jest **automorfizmem rozmaitości** C **bez punktów stałych**,
- rozmaitość C jest **krzywą eliptyczną**, czyli **torusem**,
- automorfizm krzywej eliptycznej bez punktów stałych jest **translacją**

Twierdzenia typu Ponceleta

- Twierdzenie o **zygzaku: Zig–zag**,

  dla danych dwóch okręgów (lub prostych) $C_1,\ C_2$ na płaszczyźnie, jeśli istnieje wielokąt o równych bokach, którego wierzchołki należą na zmianę do C_1 i C_2, to każdy punkt C_1 i C_2 jest wierzchołkiem takiego wielokąta,

Twierdzenia typu Ponceleta

- Twierdzenie o **zygzaku: Zig–zag**,

  dla danych dwóch okręgów (lub prostych) $C_1, \ C_2$ na płaszczyźnie, jeśli istnieje wielokąt o równych bokach, którego wierzchołki należą na zmianę do C_1 i C_2, to każdy punkt C_1 i C_2 jest wierzchołkiem takiego wielokąta,

  jeśli ponadto promienie obydwu okręgów są równe długości boków, to każdy "zygzak" ma **sześć** boków

Twierdzenia typu Ponceleta

- Twierdzenie o **zygzaku: Zig–zag**,

  dla danych dwóch okręgów (lub prostych) $C_1,\ C_2$ na płaszczyźnie, jeśli istnieje wielokąt o równych bokach, którego wierzchołki należą na zmianę do C_1 i C_2, to każdy punkt C_1 i C_2 jest wierzchołkiem takiego wielokąta,

  jeśli ponadto promienie obydwu okręgów są równe długości boków, to każdy "zygzak" ma **sześć** boków

- Uogólniona wersja twierdzenia Ponceleta (z wieloma stożkowymi)

Twierdzenia typu Ponceleta

- Twierdzenie o **zygzaku: Zig–zag**,

  dla danych dwóch okręgów (lub prostych) C_1, C_2 na płaszczyźnie, jeśli istnieje wielokąt o równych bokach, którego wierzchołki należą na zmianę do C_1 i C_2, to każdy punkt C_1 i C_2 jest wierzchołkiem takiego wielokąta,
  jeśli ponadto promienie obydwu okręgów są równe długości boków, to każdy "zygzak" ma **sześć** boków

- Uogólniona wersja twierdzenia Ponceleta (z wieloma stożkowymi)

- Twierdzenie Steinera, okręgi między dwoma stożkowymi

Twierdzenia typu Ponceleta

- Twierdzenie o **zygzaku: Zig–zag**,

  dla danych dwóch okręgów (lub prostych) C_1, C_2 na płaszczyźnie, jeśli istnieje wielokąt o równych bokach, którego wierzchołki należą na zmianę do C_1 i C_2, to każdy punkt C_1 i C_2 jest wierzchołkiem takiego wielokąta,
  jeśli ponadto promienie obydwu okręgów są równe długości boków, to każdy "zygzak" ma **sześć** boków

- Uogólniona wersja twierdzenia Ponceleta (z wieloma stożkowymi)

- Twierdzenie Steinera, okręgi między dwoma stożkowymi

- Uogólnienia wielowymiarowe