Równanie Pella

Sławomir Cynk

22 listopada 2001 roku

John Pell

ur. 1 marca 1611 w Southwick, Sussex, Anglia
zm. 12 grudnia 1685 w Londynie.

Matematyk oraz astronom brytyjski, podobno główny (współ-)autor książki Johanna Heinricha Rahna "Algebra", która zrewolucjonizowała symbolikę algebraiczną. W książce tej znajduje się przykład równania postaci

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

być może dlatego Euler nazwał to równanie równaniem Pella.

John Pell

ur. 1 marca 1611 w Southwick, Sussex, Anglia
zm. 12 grudnia 1685 w Londynie.

Matematyk oraz astronom brytyjski, podobno główny (współ-)autor książki Johanna Heinricha Rahna "Algebra", która zrewolucjonizowała symbolikę algebraiczną. W książce tej znajduje się przykład równania postaci

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

być może dlatego Euler nazwał to równanie równaniem Pella.

Prehistoria równania

Brahmagupta: 598 Ujjain, Indie(?) — 670 Indie

John Pell

ur. 1 marca 1611 w Southwick, Sussex, Anglia
zm. 12 grudnia 1685 w Londynie.

Matematyk oraz astronom brytyjski, podobno główny (współ-)autor książki Johanna Heinricha Rahna "Algebra", która zrewolucjonizowała symbolikę algebraiczną. W książce tej znajduje się przykład równania postaci

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

być może dlatego Euler nazwał to równanie równaniem Pella.

Prehistoria równania

Brahmagupta: 598 Ujjain, Indie(?) — 670 Indie
Bhaskara: 1114 Vijayapura, Indie — 1185 Ujjain, Indie

Historia

Pierre de Fermat (17 sierpnia 1601, Beaumont-de-Lomagne, Francja — 12 stycznia 1665 Castres, Francja) w liście do matematyków angielskich z roku **1656** zaproponował następujący problem:
pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej d nie będącej kwadratem równanie $x^2 - dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.

Historia

Pierre de Fermat (17 sierpnia 1601, Beaumont-de-Lomagne, Francja — 12 stycznia 1665 Castres, Francja) w liście do matematyków angielskich z roku **1656** zaproponował następujący problem:
pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej d nie będącej kwadratem równanie $x^2 - dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Przykłady

- $d = 61$, rozwiązaniem jest np.

Historia

Pierre de Fermat (17 sierpnia 1601, Beaumont-de-Lomagne, Francja — 12 stycznia 1665 Castres, Francja) w liście do matematyków angielskich z roku **1656** zaproponował następujący problem:
pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej d nie będącej kwadratem równanie $x^2 - dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Przykłady

- $d = 61$, rozwiązaniem jest np. $x = 1'766'319'049$, $y = 226'153'980$,

Historia

Pierre de Fermat (17 sierpnia 1601, Beaumont-de-Lomagne, Francja — 12 stycznia 1665 Castres, Francja) w liście do matematyków angielskich z roku **1656** zaproponował następujący problem:
pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej d nie będącej kwadratem równanie $x^2 - dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Przykłady

- $d = 61$, rozwiązaniem jest np. $x = 1'766'319'049,\ y = 226'153'980$,
- $d = 109$, rozwiązaniem jest np.

Historia

Pierre de Fermat (17 sierpnia 1601, Beaumont-de-Lomagne, Francja — 12 stycznia 1665 Castres, Francja) w liście do matematyków angielskich z roku **1656** zaproponował następujący problem:
pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej d nie będącej kwadratem równanie $x^2 - dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Przykłady

- $d = 61$, rozwiązaniem jest np. $x = 1'766'319'049,\ y = 226'153'980$,
- $d = 109$, rozwiązaniem jest np. $x = 158'070'671'986'249$, $y = 15'140'424'455'100$.

Historia

Pierre de Fermat (17 sierpnia 1601, Beaumont-de-Lomagne, Francja — 12 stycznia 1665 Castres, Francja) w liście do matematyków angielskich z roku **1656** zaproponował następujący problem:
pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej d nie będącej kwadratem równanie $x^2 - dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Przykłady

- $d = 61$, rozwiązaniem jest np. $x = 1'766'319'049$, $y = 226'153'980$,
- $d = 109$, rozwiązaniem jest np. $x = 158'070'671'986'249$, $y = 15'140'424'455'100$.

Fermat nie dodał w liście, że są to **najmniejsze** rozwiązania dodatnie powyższych równań, oraz, że liczby 61 i 109 wybrane są **nieprzypadkowo**. Fermat **musiał** znać metodę rozwiązywania.

Równaniem Pella zajmowali się wybitni matematycy angielscy XVII wieku:
William Brouncker (1620 Castle Lyons, Irlandia — 5 kwietnia 1684 Oxford, Anglia)
John Wallis (23 listopada 1616, Ashford, Kent, Anglia — 28 października 1703 Oxford, Anglia)
podali oni metodę rozwiązania równania Pella opartą na metodzie ułamków łańcuchowych.

Równaniem Pella zajmowali się wybitni matematycy angielscy XVII wieku:
William Brouncker (1620 Castle Lyons, Irlandia — 5 kwietnia 1684 Oxford, Anglia)
John Wallis (23 listopada 1616, Ashford, Kent, Anglia — 28 października 1703 Oxford, Anglia)
podali oni metodę rozwiązania równania Pella opartą na metodzie ułamków łańcuchowych.
Dopiero **Joseph-Louis Lagrange** (25 stycznia 1736 w Turynie, (obecnie) Włochy — 10 kwietnia 1813 Paryż, Francja) udowodnił (**1768**), że metoda ta pozwala na wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania Pella.

Równaniem Pella zajmowali się wybitni matematycy angielscy XVII wieku:
William Brouncker (1620 Castle Lyons, Irlandia — 5 kwietnia 1684 Oxford, Anglia)
John Wallis (23 listopada 1616, Ashford, Kent, Anglia — 28 października 1703 Oxford, Anglia)
podali oni metodę rozwiązania równania Pella opartą na metodzie ułamków łańcuchowych.
Dopiero **Joseph-Louis Lagrange** (25 stycznia 1736 w Turynie, (obecnie) Włochy — 10 kwietnia 1813 Paryż, Francja) udowodnił (**1768**), że metoda ta pozwala na wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania Pella.
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 lutego 1805, Düren, (obecnie) Niemcy — 5 maja 1859, Göttingen, (obecnie) Niemcy) podał w **1842** roku bardzo prosty dowód istnienia rozwiązania równania Pella.

Rozwiązania równania Pella

$(1, \pm 0)$ jest zawsze rozwiązaniem

Rozwiązania równania Pella

$(1, \pm 0)$ jest zawsze rozwiązaniem stąd wszystkie rozwiązania **wymierne** są postaci

$$\left(\frac{dt^2+1}{dt^2-1}, \frac{2t}{dt^2-1}\right).$$

Rozwiązania równania Pella

$(1, \pm 0)$ jest zawsze rozwiązaniem stąd wszystkie rozwiązania **wymierne** są postaci

$$\left(\frac{dt^2 + 1}{dt^2 - 1}, \frac{2t}{dt^2 - 1} \right).$$

jeśli (x, y) jest rozwiązaniem to $(\pm x, \pm y)$ są również rozwiązaniami, więc wystarczy wyznaczyć wszystkie rozwiązania dodatnie

Rozwiązania równania Pella

$(1, \pm 0)$ jest zawsze rozwiązaniem stąd wszystkie rozwiązania **wymierne** są postaci

$$\left(\frac{dt^2+1}{dt^2-1}, \frac{2t}{dt^2-1}\right).$$

jeśli (x, y) jest rozwiązaniem to $(\pm x, \pm y)$ są również rozwiązaniami, więc wystarczy wyznaczyć wszystkie rozwiązania dodatnie

Przykład. $d = 3$. Łatwo zauważyć, że $(2, 1)$ jest najmniejszym rozwiązaniem. Przez indukcje sprawdzamy, że ciąg zadany rekurencyjnie

$$\begin{aligned} &x_1 = 2,\ y_1 = 1, \\ &x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{aligned}$$

zawiera wszystkie rozwiązania dodatnie równania.

Rozwiązania równania Pella

$(1, \pm 0)$ jest zawsze rozwiązaniem stąd wszystkie rozwiązania **wymierne** są postaci

$$\left(\frac{dt^2+1}{dt^2-1}, \frac{2t}{dt^2-1}\right).$$

jeśli (x, y) jest rozwiązaniem to $(\pm x, \pm y)$ są również rozwiązaniami, więc wystarczy wyznaczyć wszystkie rozwiązania dodatnie

Przykład. $d = 3$. Łatwo zauważyć, że $(2, 1)$ jest najmniejszym rozwiązaniem. Przez indukcje sprawdzamy, że ciąg zadany rekurencyjnie

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1,$$
$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,\ y_{n+1} = x_n + 2y_n$$

zawiera wszystkie rozwiązania dodatnie równania. Łatwo następnie wyliczyć, że $x_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)$.

Podobnie dla dowolnego d wystarczy wyznaczyć najmniejsze rozwiązanie dodatnie (a, b).

Podobnie dla dowolnego d wystarczy wyznaczyć najmniejsze rozwiązanie dodatnie (a, b). Wszystkie pozostałe rozwiązania dodatnie są wtedy zadane przez ciąg rekurencyjny

$$x_1 = a,\ y_1 = b,$$
$$x_{n+1} = ax_n + bdy_n,\ y_{n+1} = bx_n + ay_n$$

Podobnie dla dowolnego d wystarczy wyznaczyć najmniejsze rozwiązanie dodatnie (a, b). Wszystkie pozostałe rozwiązania dodatnie są wtedy zadane przez ciąg rekurencyjny

$$x_1 = a,\ y_1 = b,$$
$$x_{n+1} = ax_n + bdy_n,\ y_{n+1} = bx_n + ay_n$$

Mamy ponadto,

$$x_n = \frac{1}{2}\left((a + b\sqrt{d})^n + (a - b\sqrt{d})^n\right).$$

Podobnie dla dowolnego d wystarczy wyznaczyć najmniejsze rozwiązanie dodatnie (a, b). Wszystkie pozostałe rozwiązania dodatnie są wtedy zadane przez ciąg rekurencyjny

$$\begin{aligned} &x_1 = a,\ y_1 = b, \\ &x_{n+1} = ax_n + bdy_n,\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{aligned}$$

Mamy ponadto,

$$x_n = \frac{1}{2}\left((a + b\sqrt{d})^n + (a - b\sqrt{d})^n\right).$$

Wynika to stąd, że zbiór $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ liczb postaci $x + y\sqrt{d}$ jest **pierścieniem**, a funkcja $N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$ jest multyplikatywna. Równanie Pella jest teraz równoważne równaniu $N(u) = 1$. Ponadto, element $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ jest jednością, wtedy i tylko wtedy gdy $N(u) = \pm 1$.

Twierdzenie 1. *Równanie Pella*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

posiada rozwiązanie dodatnie (x, y).

Twierdzenie 1. *Równanie Pella*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

posiada rozwiązanie dodatnie (x, y).

Lemat 1. *Dla dowolnej liczby naturalnej* m *istnieją liczby naturalne* x *i* y *takie, że* $y \leq m$ *oraz*

$$|x - y\sqrt{d}| \leq \frac{1}{m}.$$

Lemat 2. *Dla dowolnej liczby naturalnej* m *istnieją liczby naturalne* x *i* y *takie, że*

$$0 < x, \frac{m}{3d} \leq y \qquad \text{oraz} \qquad 1 \leq |x^2 - dy^2| \leq 3d.$$

Lemat 3. *Istnieje liczba naturalna* m *spełaniająca następujące warunki*

1. $1 \leq |l| \leq 3d$,
2. *równanie* $x^2 - dy^2 = l$ *ma więcej niż* $9d^2$ *rozwiązań w liczbach naturalnych* x, y.

Metoda wyznaczania rozwiązań równania Pella opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli (x, y) jest dowolnym rozwiązaniem to $\frac{x}{y}$ jest **najlepszym przybliżeniem** liczby $\sqrt{d}$, a zatem można wyznaczyć je przy pomocy rozwinięcia liczby $\sqrt{d}$ w **ułamek łańcuchowy**.

Metoda wyznaczania rozwiązań równania Pella opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli (x, y) jest dowolnym rozwiązaniem to $\frac{x}{y}$ jest **najlepszym przybliżeniem** liczby $\sqrt{d}$, a zatem można wyznaczyć je przy pomocy rozwinięcia liczby $\sqrt{d}$ w **ułamek łańcuchowy**.

Ułamkiem łańcuchowym $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ o wyrazach $a_0; a_1, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Każdą liczbę wymierną można zapisać na dokładnie dwa sposoby w postaci ułamka łańcuchowego o wyrazach naturalnych (> 0), każdą liczbę niewymierną można zapisać w jedyny sposób w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego o wyrazach naturalnych. Jeśli $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ jest rozwinięciem liczby niewymiernej α, to najlepszymi przybliżeniami liczby α są redukty $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ ułamka łańcuchowego.

Przykład Rozwinięcie liczby $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$$

A więc $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; (2)]$.

Przykład Rozwinięcie liczby $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$$

A więc $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; (2)]$. Liczymy kolejne redukty

$$[1;2] = \frac{3}{2}, [1;2,2] = \frac{7}{5}, [1;2,2,2] = \frac{17}{12}, [1;2,2,2,2] = \frac{44}{29},$$
$$[1;2,2,2,2,2] = \frac{99}{70}$$

Przykład Rozwinięcie liczby $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$$

A więc $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; (2)]$. Liczymy kolejne redukty

$$[1; 2] = \frac{3}{2}, [1; 2, 2] = \frac{7}{5}, [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}, [1; 2, 2, 2, 2] = \frac{44}{29},$$
$$[1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{99}{70}$$

Sprawdzamy, że rozwiązaniami równania Pella są następujące pary

$$(3, 2),\ (17, 12),\ (99, 70),$$

natomiast nie są pary $(7, 5), (44, 29)$.

Dla $d = 3$ otrzymujemy w podobny sposób rozwinięcie $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; (1, 2)]$,

Dla $d = 3$ otrzymujemy w podobny sposób rozwinięcie $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; (1, 2)]$,a więc kolejnymi reduktami są liczby

$$[1; 1] = \frac{2}{1},\ [1; 1, 2] = \frac{5}{3},\ [1; 1, 2, 1] = \frac{7}{4},\ [1; 1, 2, 1, 2] = \frac{19}{11},$$
$$[1; 1, 2, 1, 2, 1] = \frac{26}{15}$$

Dla $d = 3$ otrzymujemy w podobny sposób rozwinięcie $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; (1, 2)]$,a więc kolejnymi reduktami są liczby

$$[1;1] = \frac{2}{1},\ [1;1,2] = \frac{5}{3},\ [1;1,2,1] = \frac{7}{4},\ [1;1,2,1,2] = \frac{19}{11},$$
$$[1;1,2,1,2,1] = \frac{26}{15}$$

Sprawdzamy, że rozwiązaniami równania Pella są pary $(2, 1),\ (7, 4),\ (26, 15)$ a nie są $(5, 3),\ (19, 11)$.

Dla $d = 3$ otrzymujemy w podobny sposób rozwinięcie $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; (1, 2)]$,a więc kolejnymi reduktami są liczby

$$[1;1] = \frac{2}{1},\ [1;1,2] = \frac{5}{3},\ [1;1,2,1] = \frac{7}{4},\ [1;1,2,1,2] = \frac{19}{11},$$
$$[1;1,2,1,2,1] = \frac{26}{15}$$

Sprawdzamy, że rozwiązaniami równania Pella są pary $(2, 1),\ (7, 4),\ (26, 15)$ a nie są $(5, 3),\ (19, 11)$.
Podobne obliczenia dla $d = 61$ jest już jednak trudno przeprowadzić w praktyce. Rozwinięcie w ułamek łańcuchowy ma postać

$$\sqrt{61} = [7; (1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14)],$$

Dla $d=3$ otrzymujemy w podobny sposób rozwinięcie $\sqrt{3}=[1;1,2,1,2,\dots]=[1;(1,2)]$,a więc kolejnymi reduktami są liczby

$$[1;1]=\frac{2}{1},\ [1;1,2]=\frac{5}{3},\ [1;1,2,1]=\frac{7}{4},\ [1;1,2,1,2]=\frac{19}{11},$$
$$[1;1,2,1,2,1]=\frac{26}{15}$$

Sprawdzamy, że rozwiązaniami równania Pella są pary $(2,1),\ (7,4),\ (26,15)$ a nie są $(5,3),\ (19,11)$.
Podobne obliczenia dla $d=61$ jest już jednak trudno przeprowadzić w praktyce. Rozwinięcie w ułamek łańcuchowy ma postać

$$\sqrt{61}=[7;(1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14)],$$

a najmniejsze rozwiązanie pochodzi od reduktu

$$\alpha_{21}=[7;1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14,1,4,3,1,2,2,1,3,4,1]$$

i jest równe

$$(1'766'319'049,226'153'980).$$

Aby w praktyce rozwiązywać równanie Pella musimy wiedzieć, które redukty należy wybierać. Informacje te są zawarte w następujących faktach *Rozwinięcie liczby* $\sqrt{d}$ *w ułamek łańcuchowy jest okresowe, to znaczy istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $\sqrt{d} = [a_0; (a_1, \ldots, a_n)]$*, czyli (*$a_{n+i} = a_i$ *dla dowolnego naturalnego* i*).*

Aby w praktyce rozwiązywać równanie Pella musimy wiedzieć, które redukty należy wybierać. Informacje te są zawarte w następujących faktach *Rozwinięcie liczby* $\sqrt{d}$ *w ułamek łańcuchowy jest okresowe, to znaczy istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $\sqrt{d} = [a_0; (a_1, \ldots, a_n)]$*, czyli* ($a_{n+i} = a_i$ *dla dowolnego naturalnego* i*).* Oznaczmy najmiejszą liczbę spełniającą powyższy warunek przez N. Wtedy

Twierdzenie 2. *Dodatnie rozwiązania równania Pella są postaci*

$$x = p_{rN-1}, x = p_{rN-1} \qquad \textit{dla } N \textit{ parzystego}$$
$$x = p_{2rN-1}, x = p_{2rN-1} \qquad \textit{dla } N \textit{ nieparzystego},$$

gdzie

$$\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \ldots, a_i].$$

Aby w praktyce rozwiązywać równanie Pella musimy wiedzieć, które redukty należy wybierać. Informacje te są zawarte w następujących faktach *Rozwinięcie liczby* $\sqrt{d}$ *w ułamek łańcuchowy jest okresowe, to znaczy istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $\sqrt{d} = [a_0; (a_1, \dots, a_n)]$, *czyli (*$a_{n+i} = a_i$ *dla dowolnego naturalnego* i*).* Oznaczmy najmiejszą liczbę spełniającą powyższy warunek przez N. Wtedy

Twierdzenie 2. *Dodatnie rozwiązania równania Pella są postaci*

$$x = p_{rN-1}, x = p_{rN-1} \qquad \textit{dla } N \textit{ parzystego}$$
$$x = p_{2rN-1}, x = p_{2rN-1} \qquad \textit{dla } N \textit{ nieparzystego},$$

gdzie

$$\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i].$$